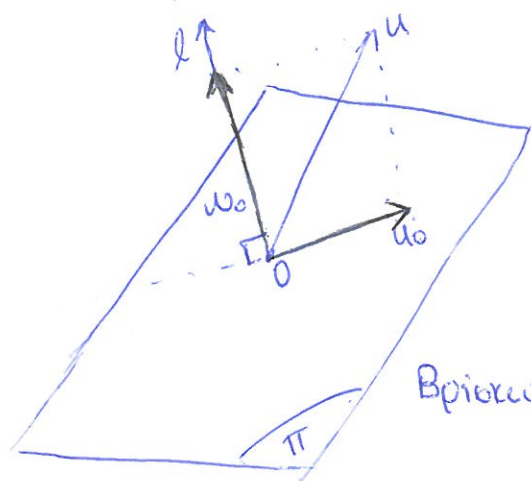




$$u_0 \in \Pi$$

$$w_0 \in l, \quad l \perp \Pi$$

$$u = u_0 + w_0$$

Βρίσκω για τυχόν διάνυσμα u τα u_0, w_0

Παίρνω ορθοκανονική βάση του Π . Έχω $\{v_1, v_2\}$ τότε

$$u_0 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2$$

$$\text{και } w_0 = u - u_0$$

Έστω V δ.γ με εσωτερικό γινόμενο διαστάσεως $n+1$, $n \in \mathbb{N}$

Έστω W να είναι ένα υπερεπίπεδο του V

Τότε $V = W \oplus l$ για μια μοναδική ευθεία l κάθετη στο W

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V δ.γ με εσωτερικό γινόμενο και έστω u_1, u_2 οξυγωνικά
 $\text{dist}(u_1, u_2)$ του μη αρνητικού αριθμού $\|u_1 - u_2\|$.

Αντικαθιστώντας $\text{dist}(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\| = \|u_2 - u_1\|$ με $\text{dist}(u, 0) = \|u\|$

π.χ.

Έστω $A = (1, 2, 3)$ και $B = (4, 5, 6)$

$$\text{dist}(A, B) = \|(1, 2, 3) - (4, 5, 6)\| = \|(-3, -3, -3)\| = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^3$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ορίζουμε $\text{dist}(A, B) = \inf \{ \text{dist}(u, v) \mid u \in A, v \in B \}$

$$\mu\epsilon \quad 0 \leq \text{dist}(A, B) < +\infty$$

$$\text{Αν } A = \{u_0\} \quad \text{dist}(\{u_0\}, B) = \text{dist}(u_0, B)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $u_0 \notin W$ $\exists$ μοναδικά $w_0 \in W$ και $w' \in l$ τ.ω. $u_0 = w_0 + w'$

$$\text{Τότε } \text{dist}(u_0, W) = \|w'\|$$

Απόδειξη

Έστω τυχαίο $u \in W$

$$\|u_0 - w_0\|^2 \leq \|u_0 - w_0\|^2 + \|w_0 - u\|^2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{όμως } u_0 - w_0 = w' \in l \\ w_0 - u \in W \\ l \perp W \end{array} \right\} \Rightarrow \langle u_0 - w_0, w_0 - u \rangle = 0$$

Η (1) από Πυθαγόρειο θεωρημα γράφεται:

$$\|u_0 - w_0\|^2 \leq \| (u_0 - w_0) + \cancel{(w_0 - u)} \|^2 = \|u_0 - u\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u_0 - w_0\| \leq \|u_0 - u\| \quad \forall u \in W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u_0 - w_0\| \leq \underbrace{\inf \{ \|u_0 - u\|, u \in W \}}_A = \text{dist}(u_0, W)$$

$$\text{όμως } \|u_0 - w_0\| \in A$$

$$\text{Άρα } \|u_0 - w_0\| = \min \{ \|u_0 - u\|, u \in W \} = \text{dist}(u_0, W)$$

Εφαρμογή για τον $\mathbb{R}^3$ παίρνουμε την ελάχιστη απόσταση ευθείας από ~~α~~ επίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ευθεία που διέρχεται από το 0 των οποίων η αρχική ευθεία
Ένα επίπεδο που διέρχεται από το 0 ονομάζεται αρχικό επίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

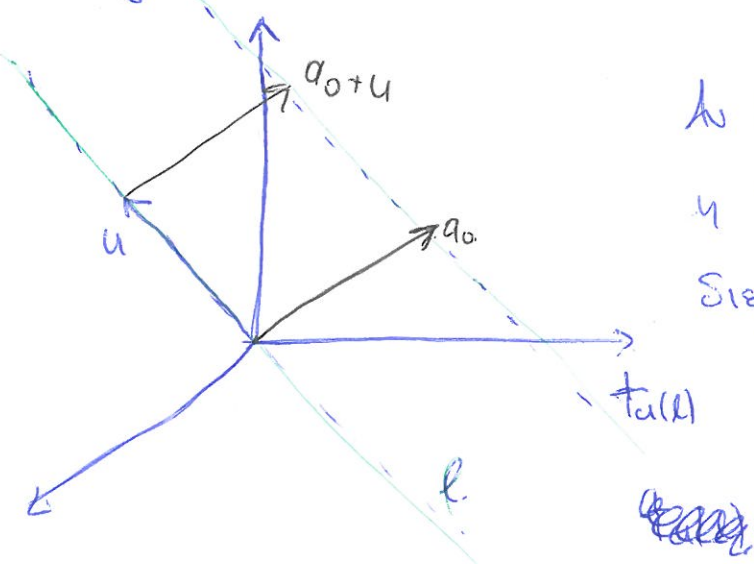
Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ονομάζεται ισομετρία αν ισχύει $\|T(u)\| = \|u\|$.

Είναι μια απεικόνιση 1-1, επί, συνεπώς όπως και η αντίστροφή της. $\forall u \in \mathbb{R}^3$

Οι μεταφορές (translations)

Έστω $a_0 \in \mathbb{R}^3$. Το εξαρωνοποιούμε.

Ορίζουμε την συνάρτηση $t_{a_0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με νόμο: $t_{a_0}(v) = a_0 + v \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$



Αν l είναι αρχική ευθεία με $l \in \mathbb{R}^3$
η $t_{a_0}(l)$ ονομάζεται ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που
διέρχεται από το a_0

$$t_{a_0}(l) = \{t_{a_0}(v) \mid v \in l\} = \{a_0 + v \mid v \in l\} = a_0 + l$$

Έστω $W \subseteq \mathbb{R}^3$ να είναι ένα αρχικό επίπεδο

Το $t_{a_0}(W)$ είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ~~απαιτείται~~ περιέχει το a_0 .

Έτσι για μια ευθεία L θα υπάρχει πάντα $a \in \mathbb{R}^3$ και αριθμική ευθεία l με $L = t_a(l)$

Για ένα επίπεδο ω' του $\mathbb{R}^3$ υπάρχει πάντα ένα αριθμικό επίπεδο ω και $a \in \mathbb{R}^3$ όπου $\omega' = t_a(\omega)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $a \in \mathbb{R}^3$, l αριθμική ευθεία, ω αριθμικό επίπεδο. Τότε

1) $l = t_a(l)$ αν $a \in l$. Αν $a \notin l \Rightarrow l \cap t_a(l) = \emptyset$

2) $\omega = t_a(\omega)$ αν $a \in \omega$. Αν $a \notin \omega \Rightarrow \omega \cap t_a(\omega) = \emptyset$

Απόδειξη

1. Έστω $a \in l$. Τότε αν $u \in l$ $t_a(u) = a + u \in l$

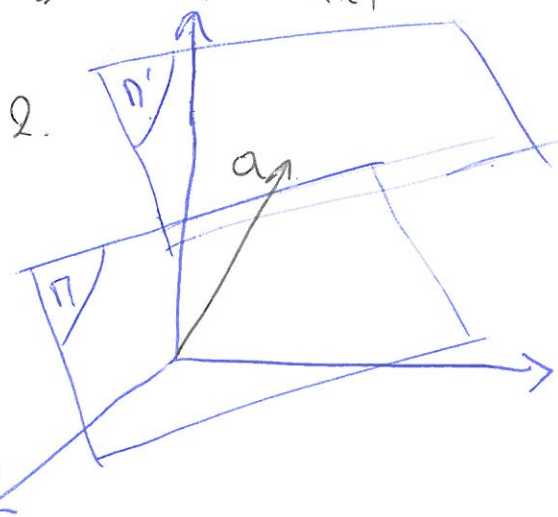
Άρα $t_a(l) \subseteq l$ (1)

Αντίστροφα αν $v \in l$ τότε $a + (v - a) \in a + l$ (αφού $v, a \in l$)

όπου $a + l = t_a(l)$. Άρα $l \subseteq t_a(l)$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow t_a(l) = l$

Αν $l = t_a(l)$ και αριθμικό $a = a + \overset{0 \in l}{0} \in a + l = t_a(l) = l \Rightarrow a \in l$



$$\pi' = \pi + a = t_a(\pi)$$

Έστω ότι $a \in W$. Παίρνουμε $u \in W$. Το $a+u = t_a(u) \in t_a(W)$

Άρα $t_a(W) \subseteq W$ (3)

Έστω τώρα $u \in W$ $u = a + (u-a) \in a+W = t_a(W)$ (4)

Άρα $W \subseteq t_a(W)$ (4)

Από (3) και (4) έψω ότι $t_a(W) = W$

Έστω ότι ισχύει $t_a(W) = W$. Τότε $a = a+0 \in a+W = t_a(W)$

Άρα $a \in t_a(W)$. Όπως $W = t_a(W) \Rightarrow a \in W$

1. Έστω $a \notin L$ και $b \in (L \cap t_a(L))$

Αφού $b \in t_a(L) \exists u \in L : b = t_a(u) = a+u \Rightarrow$
 ~~$b, u \in L$~~ $b, u \in L$

$\Rightarrow a = b-u \in L \Rightarrow a \in L$ άτοπο από υπόθεση

Άρα $L \cap t_a(L) = \emptyset$

2. Έστω ότι $a \notin W$. Τότε $W \cap t_a(W) = \emptyset$

Έστω ότι $\exists c \in W \cap t_a(W)$

Άρα $c \in t_a(W)$. Άρα $\exists v \in W : c = t_a(v) = a+v \Rightarrow a = c-v \in W \Rightarrow$

Απόφα. $c \in W$

$\Rightarrow a \in W$ άτοπο από υπόθεση.

Συνεπώς $W \cap t_a(W) = \emptyset$

ΠΡΟΤΑΣΗ - ΑΞΙΩΜΑ

Έστω L_1, L_2 ευθείες του $\mathbb{R}^3$ που έχουν 2 διαφορετικά ~~εξ~~ κοινά επίπεδα. Τότε $L_1 = L_2$

Απόδειξη

Έστω $L_1 = t_{a_1}(l_1)$ και $L_2 = t_{a_2}(l_2)$ για $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ και

l_1, l_2 να είναι δύο αλληλές ευθείες.

Έστω b_1, b_2 , με $b_1 \neq b_2$ 2 κοινά επίπεδα των L_1, L_2 άρα

$b_1, b_2 \in L_1$ και $b_1, b_2 \in L_2$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 \in L_1 \quad \text{Άρα υπάρχει } v_1 \in l_1 : b_1 = a_1 + v_1 \quad \textcircled{1} \\ b_2 \in L_1 \quad \text{Άρα } \exists v_2 \in l_1 : b_2 = a_1 + v_2 \quad \textcircled{2} \end{array} \right\} \Rightarrow b_1 - b_2 = v_1 - v_2 \in l_1$$
$$\left. \begin{array}{l} b_1 \in L_2 \quad \text{Άρα } \exists v_3 \in l_2 : b_1 = a_2 + v_3 \quad \textcircled{3} \\ b_2 \in L_2 \quad \text{Άρα } \exists v_4 \in l_2 : b_2 = a_2 + v_4 \quad \textcircled{4} \end{array} \right\} \Rightarrow b_1 - b_2 = v_3 - v_4 \in l_2$$

$$\Rightarrow b_1 - b_2 \in l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{από πρόταση προηγούμενη} \\ \text{μια-μιας} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 = l \quad \text{από } \text{απόδειξη}$$

$$\text{Άρα } L_1 = t_{a_1}(l) \text{ και } L_2 = t_{a_2}(l)$$

$$a_1 = a_1 + 0 \in a_1 + l = t_{a_1}(l) = L_1$$

$$\text{όπου } a_2 = t_{a_2}(l) = L_2$$

$$\text{Έστω } \text{από } u_0 \in L_2 \quad \text{Τότε } u_0 = a_2 + w_0 \text{ με } w_0 \in l$$

-4-

Από (1) και (3) $a_1 + v_1 = a_2 + v_3 \Rightarrow a_1 = a_2 + v_3 - v_1 \in a_2 + \ell = t_{a_2}(\ell) = L_2$

$u_0 = a_1 + w_0 = a_2 + v_3 - v_1 + w_0 = a_2 + (v_3 - v_1 + w_0) \in t_{a_2}(\ell) = L_2$

Άρα $L_1 \subseteq L_2$

Όμοιος παίρνω $L_2 \subseteq L_1 \Rightarrow L_1 = L_2$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $L_1 = t_{a_1}(\ell_1)$, $L_2 = t_{a_2}(\ell_2)$ δύο ευθείες του $\mathbb{R}^3$. Τότε $L_1 = L_2$

αν $\ell_1 = \ell_2$ και $a_1 - a_2 \in \ell = \ell_1 = \ell_2$

Απόδειξη

Έστω $L_1 = L_2$ με $L_1 = t_{a_1}(\ell_1)$, $L_2 = t_{a_2}(\ell_2)$

Άρα έχω τουλάχιστον 2 κοινά στοιχεία. Τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\ell_1 = \ell_2$, $a_1 \in L_1 = L_2 \Rightarrow a_1 \in L_2 \Rightarrow a_1 = t_{a_2}(u)$

Για $u \in \ell_2 = \ell_1 = \ell \Rightarrow a_1 = a_2 + u \Rightarrow a_1 - a_2 = u \in \ell$

Αντίστροφα

Έστω ότι L_1, L_2 , $L_1 = t_{a_1}(\ell_1)$, $L_2 = t_{a_2}(\ell_2)$ $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ $a_1 - a_2 \in \ell$

Έστω $w_0 \in L_1$. Τότε $w_0 = t_{a_1}(v)$ για $v \in \ell_1$, $w_0 = a_1 - v$ (1), $v \in \ell_1$

Επίσης $a_1 - a_2 \in \ell \Rightarrow a_1 - a_2 = v' \in \ell \Rightarrow a_1 = a_2 + v'$ (2)

Από (1) και (2) $w_0 = (a_2 + v') - v = a_2 + (v' - v) \in t_{a_2}(\ell) = L_2$

Από (1) και (2) $w_0 = (a_2 + v') - v = a_2 + (v' - v) \in t_{a_2}(\ell) = L_2$

Άρα $L_1 \subseteq L_2$. Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι $L_2 \subseteq L_1$

Άρα $L_1 = L_2$

$$L = \{a\} \cup \{u\}$$

$b \in L$ αυθόρ. Τότε $b = \{a\} \cup \{u\}$ για κάποιο $u \in L$.

$$b = a + u \Rightarrow b - a = u \in L.$$

$$\begin{matrix} \{a\} \cup \{u\} & \{a\} \cup \{u\} \\ b - a \in L & \end{matrix} \Rightarrow \{b\} = \{a\} \Rightarrow \underline{\text{Συνεπώς}}$$

$$L = \{a\} \cup \{u\}$$

όπου αυθόρ. $b \in L$.

$$\text{Τότε } \{b\} = L$$

Παραδείγματα ευθείας

Δύο διαφορετικές ευθείες L_1, L_2 ($L_1 \neq L_2$) έχουν παραλλήλες αν υπάρχει απτική ευθεία l , $a, b \in \mathbb{R}^3$: $L_1 = \{a\} \cup \{u\}$, $L_2 = \{b\} \cup \{u\}$

Παράδειγμα

Έστω ευθεία l και $a \notin l$ (l απτική)

$$\{a\} \cup \{u\}, \{b\} \cup \{u\}$$

Έστω ότι ταυτίζονται $\Rightarrow \{a\} \cup \{u\} = \{b\} \cup \{u\}$ και $\{a\} \cup \{u\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{a\} = \{u\}, u \in l \Rightarrow a = u \in l \text{ άτοπο από υπόθεση.}$$

Άρα $\{a\} \cup \{u\} \neq \{b\} \cup \{u\} \Rightarrow$ ικανοποιεί του κριτήριο $\Rightarrow$ είναι παραλλήλες.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω L_1, L_2 να είναι 2 παραλλήλες ευθείες. Τότε $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

Απόδειξη

Έστω $L_1 = t_{a_1}(l)$, $L_2 = t_{a_2}(l)$ $L_1 \neq L_2$ και l αρκετά ευθεία.

Έστω ότι $\exists c_0 \in L_1 \cap L_2$. Τότε αφού $c_0 \in L_1 \Rightarrow t_{c_0}(l) = t_{a_1}(l)$ και $c_0 \in L_2 \Rightarrow t_{c_0}(l) = t_{a_2}(l)$

$\Rightarrow t_{a_1}(l) = t_{a_2}(l) \Rightarrow L_1 = L_2$ Άστο.

Συνεπώς $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

(Συνέχεια απόδειξης στο επόμενο μισό της σελίδας)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω l_1, l_2 2 αλληλεπόμενες ευθείες με $l_1 \neq l_2$ και έστω $a_0 \in \mathbb{R}^3, a_0 \neq 0$

Τότε οι $t_{a_0}(l_1), t_{a_0}(l_2)$ έχουν ένα κοινό σημείο a_0

Απόδειξη

Έστω $b \in t_{a_0}(l_1) \cap t_{a_0}(l_2)$

με $b \neq a_0$

$$t_b(l_1) = t_{a_0}(l_1)$$

$$t_b(l_2) = t_{a_0}(l_2)$$

Αρα $t_{a_0}(l_1) = t_{a_0}(l_2) \Rightarrow l_1 = l_2$ Άστο.

Άρα έχουμε αλληλεπόμενες ευθείες.

